گره در گنبدهای ایرانی(نمونه موردی مسجد حکیم)[1]

احد نژاد ابراهیمی: دانشیار دانشگاه هنر اسلامی، تبریز
ahadebrahimi@tabriziau.ac.ir
عارف عزیزپور شوبی: کارشناس ارشد معماری اسلامی از دانشگاه هنر اسلامی تبریز-ایران
a.azizpour@tabriziau.ac.ir

چکیده

گره‌ها از پیشرفته‌ترین آرایه‌های پوشاننده سطح در معماری ایرانی-اسلامی می‌باشد. این الگو در ادوار تاریخی ایران و سایر فرهنگ‌های جهان اسلام نسبت به پیشرفت‌های که در علوم ریاضی صورت می‌گرفت توسعه‌های فروانی یافته‌است. گسترش گره با سطح تخت مطابق است. اما سطح کروی دارای که یکی از نمونه‌های آن در معماری گنبدها هستندکه دارای ساختاری است که گره با آن سازگاری ندارد. با این حال گنبدهای متعددی وجود دارد که با گره پوشانیده شدند که یکی از آن‌ها گنبد مسجد حکیم می‌باشد. از آن رو که معماری ایرانی متکی بر آموزشی سینه به سینه بود این راه‌کارها غیر مکتوب و ناشناخته باقی مانده‌اند. از این رو این تحقیق سعی دارد تا با بررسی این گنبد راه‌کار استفاده شده در این گنبد در زمینه انتقال گره را کشف کند تا یک روش به روش‌های کشف شده در مورد انتقال گره به سطوح گنبدی بیفزاید تا در انتقال گره به سطوح معماری معاصر مورد استفاده قرار بگیرد که در این تحقیق با محوریت پرسش‌های: که چه تمایزی بین سطح تخت و گنبد در انتقال گره وجود دارد؟ و از چه راه‌کاری برای انتقال گره در گنبد مسجد حکیم اصفهان استفاده شده است؟ با استفاده از روش توصیفی تحلیل به جمع‌آوری اطلاعات از طریق پیمایش‌های میدانی و مطالعه منابع مکتوب پرداخته شده است. نتیجه این پژوهش نشان می‌دهد که کاشیکاری مبتنی بر اصول چهارگانه تقارن است که برای نگاشت شدن با صفحه اقلیدوسی سازگاری دارد و به دلیل تغییر در تراکم مقطع عرضی گنبد نگاشت گره با آن سازگاری ندارد. به این خاطر در گنبد مسجد حکیم، گره‌ها در مقطع عرضی گنبد از یک دیگر منفصل شده و به گونه‌ای تنظیم شدن تا با تعریف شمسه مجازی پیوسته به نظر برسند.

کلمات کلیدی: ریاضیات در معماری، گره، گنبد، انتقال کروی، مسجد حکیم

۱- این مقاله از پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد، عارف عزیزپور شوبی با عنوان «کاربست گره در سطوح آزاد با الگوبرداری از گره‌های بکار رفته در سطوح گنبدی فضاهای مذهبی ایرانی اسلامی از دوره ایلخانی تا پایان دوره قاجار» به راهنمایی دکتر احد نژاد ابراهیمی در دانشگاه هنر اسلامی، تبریز استخراج شده است.

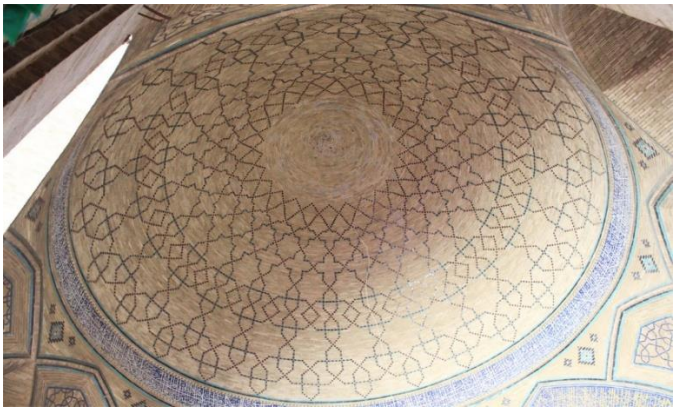
بیان مسئله

یکی از اصلی‌ترین عناصر تشکیل دهنده شخصیت بنا در معماری ایرانی-اسلامی سطوح و تزئین سطوح معماری است. اگر یک تقسیم بندی ساختاری ابتدایی از سطوح در این معماری ارائه شود؛ سطوح به سه ساختار تخت، منحنی و کروی تقسیم می‌شوند که هر سطح پوشش تزئینی مربوط به خودش را داشت. "پوشش سطوح نیز در معماری ایرانی-اسلامی به سه دسته گیاهی، کتیبه‌ای و گره تقسیم می‌شود."(کیانی ۱۳۷۶).

گره‌ها از پیشرفته‌ترین آرایه‌های پوشاننده سطح در معماری ایرانی _اسلامی می‌باشد. این الگو در ادوار تاریخی ایران و سایر فرهنگ‌های جهان اسلام نسبت به پیشرفت‌های که در علوم ریاضی صورت می‌گرفت توسعه‌های فروانی یافته‌است. گسترش گره با سطح تخت مطابق است و از فرمول "X2+Y2=1" (Abas and Salman 1995, 66) پیروی می‌کند. بنابراین گره می‌تواند بدون مشکل در سطح تخت گسترش یابد . اما سطح کروی دارای که یکی از نمونه‌های آن در معماری گنبدها هستند که دارای ساختاری متمایز است. زیرا کل سطح ساختار یک نواختی ندارد و گسترش آن همراه با فشردگی و گشودگی است. از این رو اصول گسترش گره با این سطوح همخوان نیست.

با این حال، گنبدهای متعددی در معماری ایرانی اسلامی وجود دارند که با گره‌ها به زیبایی و با کمترین اعواج تزئین شده‌اند که یکی از این گنبدها مسجد حکیم اصفهان است که یکی ار شاهکارهای معماری ایران در دوره اسلامی، مسجدی است چهار ایوانی با آجرکاری‌های بسیار متنوع و یکی از بهترین کارهای معماری دوره صفویه می‌باشد(ماهرالنقش ۱۳۷۶، ۹). که بر روی مسجد قرن چهارمی جوجیر که در دو دوره آل بویه بنا شده است که هنوز هم آثاری سردر این مسجد باقی است (حاجی قاسمی، ۱۳۷۵: ۴۴) که از نظر تزئین آجرکاری بسیار حیث قدمت و زیبایی بسیار ارزشمند است و به نوعی از اولین گره‌سازی‌های موجود در معماری ایرانی است. در گذشته محاسبات و ترسیم گره از سوی استادکاران انجام می‌شد و به‌طور سینه‌به‌سینه و محافظت‌شده از نسلی به نسلی دیگر منتقل می‌شد، ازاین‌رو دانش ایجاد و بکارگیری گره در سطوح بسیار بحث‌برانگیز است؛ زیرا روش‌ها در نزد استادان متفاوت بوده و همچنین برای اینکه فن ایجاد گره فاش نشود، استاد روش را به‌صورت کامل مکتوب نمی‌کرده بلکه مقداری از روش را به ذهن می‌سپرد. بنابراین تا به حال منبع مکتوبی مشاهده نشد که چگونگی شیوه‌های گره به سطوح گنبدی را به صورت کامل شرح دهد. بنابراین این تحقیق سعی دارد تا با بررسی گنبد مسجد حکیم اصفهان، راه‌کار استفاده شده در انتقال گره به سطح این گنبد را استخراج کند.

شکل ۱، سردر جورجیر. ماخذ: آرشیو نگارنده



شکل ۲، گنبد مسجد حکیم. ماخذ: آرشیو نگارنده

روش تحقیق

این تحقیق از نوع تحقیق‌های تاریخی است که با روش توصیفی-تحلیلی پژوهش شده است و اطلاعات لازم برای تحقیق از طریق مطالعات کتابخانه‌ای و پیمایش‌های میدانی بوده است تا به این پرسش‌ها پاسخ دهد که چه تمایزی بین سطح تخت و گنبد در انتقال گره وجود دارد؟ و از چه راه‌کاری برای انتقال گره در گنبد مسجد حکیم اصفهان استفاده شده است؟ و ضرورت این تحقیق از این رو است که این راه‌کارهای اصالتمند در صورت لزوم در سطوح سه بعدی معماری معاصر قابل استفاده هستند. در این تحقیق برای تفهیم ساختار ریاضی گره و محدودیت‌های آن در مقابل سطوح ابتدا ساختار گره از منظر تئوری و ریاضی بررسی می‌شود و سپس بعد از به تحلیل و مدل سازی گره در گنبد مسجد حکیم می‌پردازیم.

پیشینه تحقیق

انتقال گره بر روی گنبد یکی از دستاوردهای بزرگ هنرمندان مسلمان بوده است به دلیل اینکه این موضوع از اهمیت بسیار ویژه‌ای برخوردار می‌باشد پژوهش‌های بسیاری توسط پژوهشگران متعدد در زمینه پاسخ به سؤال بالا انجام شده که در جدول زیر گردآوری شده است.

جدول ۱. پژوهش‌های پیشین. تنظیم: نگارنده

نویسنده	پژوهش و نتیجه
بونر (۲۰۱۸)	تبدیلات هندسی گره در گنبد را با احجام کروی و اصول ژئودزیک بررسی می‌کند(J. Bonner 2018).
بونر (۲۰۱۷)	دو سنت تاریخی برای اعمال الگوهای هندسی اسلامی به سطوح گنبدها را بیان می‌کند که شامل استفاده از قسمت‌های ترکین و استفاده از احجام افلاطونی و ارشمیدسی بر سطوح گنبد است. آنچه بونر در مورد قسمت های شعاعی ترکین بین می کند متفاوت از آنچه است که در این پژوهش ارائه شد. از نظر نویسنده بونر در دچار اشتباه شد چون گره در گنبد مسجد جامع گلپایگان در هر ردیف عوض می‌شود و واگیره ثابتی ندارد.(J. Bonner 2017)

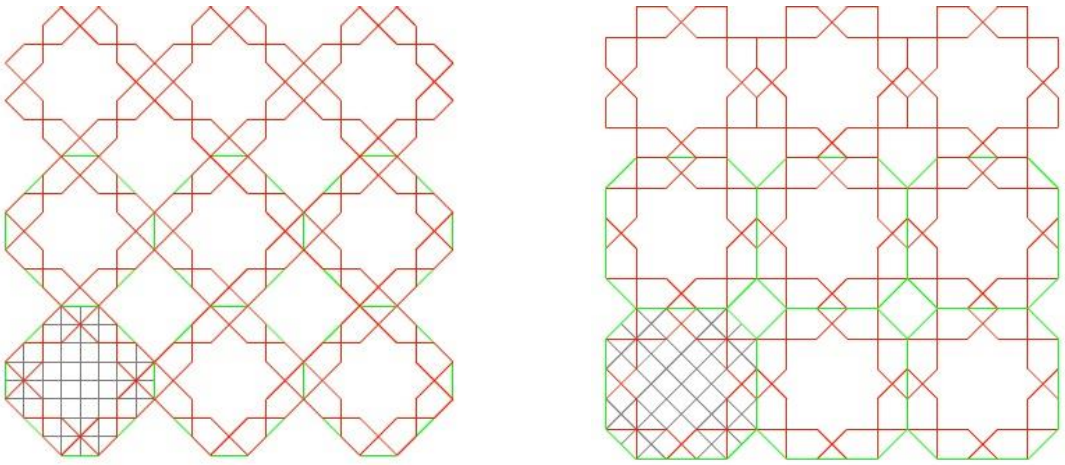
کسرایی و دیگران (۲۰۱۵)	ابتدا گره ها بررسی می‌شوند و سپس سه گنبد را تحلیل کردند. سپس، آن‌ها بیان می‌کنند که معماران ایرانی از گره دست‌گردان برای پوشش گنبدها استفاده می‌کردند.
بونر (۲۰۱۶)	ابتدا اهمیت تاریخی الگوهای هندسی اسلامی و سپس فن تقارن چند وجهی افلاطونی بکار گرفته شده برای انتقال الگوهای هندسی در گنبدخانه شمال شرقی مسجد جامع اصفهان را ارائه می‌دهد(J. F. Bonner 2016).
سرهنگی (۲۰۰۸)	انتقالهای کروی و کاشی کاری بر روی کره با اصول هندسه عملی و احجام کروی بوزجانی بررسی می‌شود.

همانطور که بررسی پژوهش های پیشین نشان می‌دهد گره در گنبد به روش‌های مختلفی انتقال می‌یافت که در بین پژوهش‌های پیشین گنبد مسجد حکیم بررسی نشده دیده شد. از این رو این تحقیق سعی دارد تا با بررسی این گنبد یک روش جدید از اصول انتقال گره به گنبد را کشف کند.

گره در سطح

هر گونه طراحی معماری در اصل کاری در زمینه هندسه است. هر دو با خواص خطوط، سطوح و اشکال در فضا سروکار دارند، پس هر گونه تحلیل یک اثر معماری، تا حدی تحقیق درباره هندسه آن است. اصول هندسه به شیوه گوناگون در سنت‌های مختلف معماری به کار رفته است(الاسد ۱۳۷۶، ۳۴). هندسه علمی است که کل تا جز این معماری را تحت تاثیر خود قرار می‌دهد و تمامی ساختارها و اشکال از آن مشتق می‌شود. بنابراین، واژه مهندس به شخصی اطلاق می‌شد که بر علم هندسه تسلط داشتند و بر اساس متون قدیم معماران به افرادی آگاه به هندسه بودند(طاهری، ۱۳۹۰: ۵۱). معماری گذشته ایران بر پایه هندسه بنا شده که از ویژگی‌های بارز آن تزیین و نقش بندی سطوح است(ولی بیگ و دیگران، ۱۳۹۵: ۱۳). الگوها ویژگی بنیادی فضای معماری (داخل معماری، شهری و منظر) هستند.

گره‌ها، الگوهای پیچیده بسیار مبتنی بر ساختارهای ریاضی هستند(Critchlow 1976) که اسلوبی بسیار منظم از نقوش هندسی با مجموعه خاصی از عناصر قابل تعریف ریاضی است(نجیب اقلو، ۱۳۷۵ :۱۳۱). سیر تحول پیشرفت گره مبتنی بر پیشرفت هندسه بوده که از ابتدا با طرح ساده مبتنی بر مدول‌های آجری شروع شد و سپس به سمت طرح‌های بسیار پیچیده در کاشی معرق پیش رفت. با توجه به تعریف بسیاری از محققان و هنرمندان این زمینه، گره ترکیب نقش مایه‌های هندسی در یک قاعده مشخص است که بر اساس تقارن قابلیت گسترش پذیری دارد. این گسترش پذیری مبتنی بر تکرار واگیره در گره است. همانطور که در شکل پایین نشان داده شد، نوع تکرار نیز می‌تواند بر شکل کلی گره تاثیر گذار باشد.

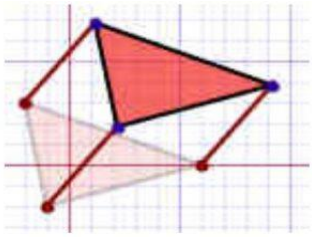
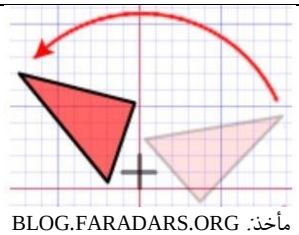
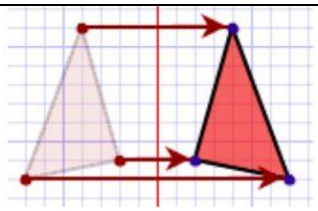
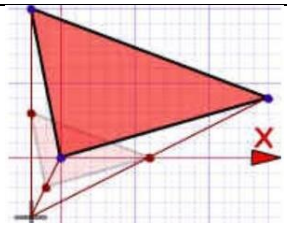


شکل ۳.گره‌های متفاوت با واگیره‌های یکسان

همانطور که بیان شد، گسترش گره‌ها عمدتا در دو دسته تناوبی و شبه تناوبی جای می‌گیرد در دسته تناوبی، "اگر این تکرار صرفا در یک جهت رخ دهد در گروه کتیبه و اگر در دو جهت رخ دهد در دسته تصویر زمینه جای می‌گیرد" (Horne 2000, 14). در دسته شبه تناوبی نیز تکرار بر اساس گسترش‌های پنج، ده و دوازده‌گانه است که به شبهکریستال‌ها نیز معروفند(Ajlouni 2018). این تکرارهای منظم نیازمند سطحی با تراکم ثابت مانند سطح تخت است که با سطح سه بعدی مانند گنبد همخوانی ندارد. شواهد بجا مانده از طراحان الگوها بر سطوح ساختمان‌های دوران اسلامی در ایران و نواحی اطراف نشان می‌دهد این هنرمندان به سطح بالای از علوم ریاضی مسلط بودند.

گره ها مصداق بارز دانش بالای ریاضی در بین معماران یا هنرمندان مسلمان است، زیرا آرایش و گسترش خلاقانه نقوش هندسی شدید بر اساس اصول ریاضی است. ساخت الگو روی کره فهم پایه‌ای از هندسه ای را لازم دارد که از هندسه اقلیدوسی پیروی نمی‌کند. یک الگوی هندسی اسلامی(گره) به‌طور ریاضی به‌عنوان یک انتظام سطحی از پاره‌خط‌های است که باهم تکثیر می‌شوند و یک مجموعه کوچک از شکل‌های متفاوت را ترسیم می‌کنند(Kaplan and Salesin 2004). این انتظام مبتنی بر فاکتورهای متفاوت است که گره بر اساس آن‌ها شکل می‌گیرد که یکی از این فاکتورها زمینه یا سطحی است که گره بر روی آن شکل می‌گیرد؛ چون " هر آلت یک نگاشت سطحی کوچک است"(همان، ۱۰۲) در کلیت معمول، کاشی‌کاری‌ها می‌تواند مشی ریاضی بسیار پیچیده‌ای نمایش دهد، این توالی پیوسته از این تفصیل است که یک کاشی‌کاری باید مستلزم یک انتزاع ریاضی باشد. حقیقتی که یک مجموعه مشخص چندضلعی‌ها یک کاشی‌کاری صفحه همیشه از طریق سطح استدلال قوی بجای محسوب کردن بی‌نهایت تک کاشی‌کاری بنیان می‌گیرد(J. Bonner and Kaplan 2017). گره‌ها نیز مانند هر الگوی دیگر بر طبق قواعد مشخصی تکرار می‌شود که در تبدیلات هندسی چهارگانه جای می گیرد: انتقال، دوران، تغییر مقیاس و تقارن لغزنده. برای اینکه بتوانیم به‌طور دقیق این تبدیلات هندسی را تدقیق کنیم ابتدا باید فاکتورهای هندسی تشکیل‌دهنده را تشریح کنیم که در ادامه به آن می‌پردازیم.

جدول ۲. حالتهای انتقال. ماخذ(J. Bonner and Kaplan 2017): . تنظیم: نگارنده

تبدیل	توضیح	تصویر
انتقال	در هندسه اقلیدسی، انتقال (به انگلیسی: Translation) عملی است که طی آن تمامی نقطه‌ها به‌اندازه‌ای ثابت در جهتی خاص انتقال داده می‌شوند؛ به‌عبارت‌دیگر، برداری ثابت به‌تمامی نقطه‌ها افزوده می‌شود. "در یک تبدیل T تمامی صفحه بر روی خودش یک حرکت یا یک طولپای نامیده می‌شود که هر حرکت یک خود ریختی است" (گرینبرگ، ۱۳۸۹: ۳۳۶). هر نقطه با یک بردار v = (tx,ty) جابجا می‌شود؛ که هر نقطه (X,Y) را به یک تقطه (x + tx,y + ty) جابجا می‌کند. $\begin{pmatrix}1 & 0 & tx\\0 & 1 & ty\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	 مأخذ: BLOG.FARADARS.ORG
چرخش	ماتریس دوران در جبر خطی، به ماتریسی گفته می‌شود که توسط آن می‌توان اشکال را در فضای اقلیدسی دوران داد. چرخش هر نقطه در جهت پا ساعت‌گرد در اطراف مبدأ با زاویه θ است. $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	 مأخذ: BLOG.FARADARS.ORG
انعکاس محوری	انعکاس در محور X: هر نقطه: (X,Y) را به (X,-Y) تبدیل می‌کند. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	 مأخذ: BLOG.FARADARS.ORG
مقیاس یکپارچه	کل سطح را با یک ضریب aافزایش یا کاهش می‌دهد: هر نقطه (X,Y) به (aX,aY) تبدیل می‌شود. $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & a & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	 مأخذ: BLOG.FARADARS.ORG

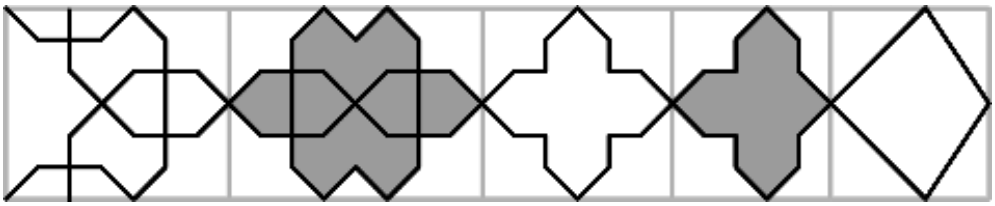
گره در گنبد

در تعریف هندسی گنبد مکان هندسی نقاطی است که از دوران چفدی مشخص حول یک محور قائم به وجود می‌آید؛ اما در زبان معماری: گنبد پوششی است که بر روی زمینه گرد برپا می‌شود. رولان بزنوال گنبدها را در دسته طاق‌های بسته قرار داده است که از چرخش یک طاق به دست می‌آید(بزنوال ۱۳۷۹، ۴۹). پیدایش یک طاق دورانی از طریق گردش یک مقطع مولد به دور یک محور عمودی حاصل می‌شود. وقتی‌که مقطع مولد یک نیم‌دایره است، شکل به‌دست‌آمده یک نیم‌کره است(تاق کروی)، این‌گونه تاق با کمک یک مقطع سهموی یا بیضوی نیز حادث شود(تاق کروی ناقص، خیز کوتاه یا خیز بلند) (همان، ۷۸).

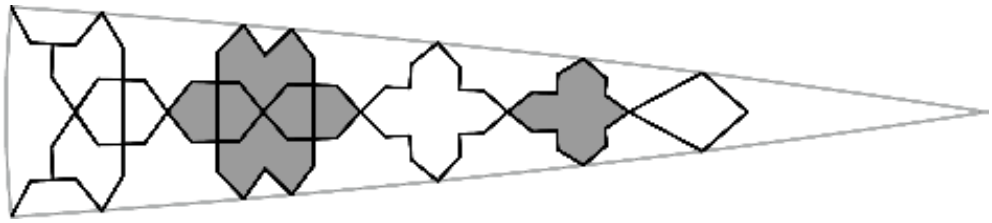
یا در کاشی‌کاری چندضلعی‌های مبتنی بر هندسه اقلیدسی، اگر P تعداد اضلاع چندضلعی را نشان دهد و Q تعداد تکثیرهای چندضلعی باشد مطلوب است که (P_2)(Q-2)=4 باشد. اما از آنجای که زاویه داخلی مثلث بر روی کره بیشتر از ۱۸۰ است، بنابراین (P_2)(Q-2)<4 است (Sarhangi 2008, 513). بنابراین یک الگوی هندسی ساختار منطبقی با سطح گنبدی ندارد. پوشش گنبدها یک چالش مهم برای هنرمندانی بود که آن را با گره پوشانیدن (Kasraei, Nourian, and Mahdavinejad 2016, 316; Hankin 1925, 16).

گره در گنبد مسجد حکیم

همانطور که در بالا بیان شد گره‌ها الگو منطبق بر اصول اقلیدوسی هستند که با سطح تخت مطابقت دارند و با گنبدها سازگاری ندارد چون سطح گنبد دارای تراکم ثابت برای نگاشت شدن را ندارد و به صورت صعودی تراکم سطح گنبد تغییر می‌کند. به این خاطر، در این گنبد تزئین شده با گره، گره در مقطع عرضی به صورت پیوسته نیست بلکه نوع آلت‌های(اجزا) تشکیل دهنده گره به صورت ردیفی تغییر می‌کند تا تغییر تراکم سطح را کنترل کند. از این رو، اگر گره بکار رفته در سطح گنبد را به سطح تخت انتقال دهیم شمسه که در سطوح بالاتر بکار رفته است اجزای کمتری دارد؛ اما اندازه اجزای بزرگتری از شمسه‌های ردیف پایین تر دارد تا وقتی روی قسمت‌های ترکین گنبد انتقال پیدا می‌کند، اندازه آن متناسب با اندازه شمسه‌های ردیف‌های پایین‌تر شود.

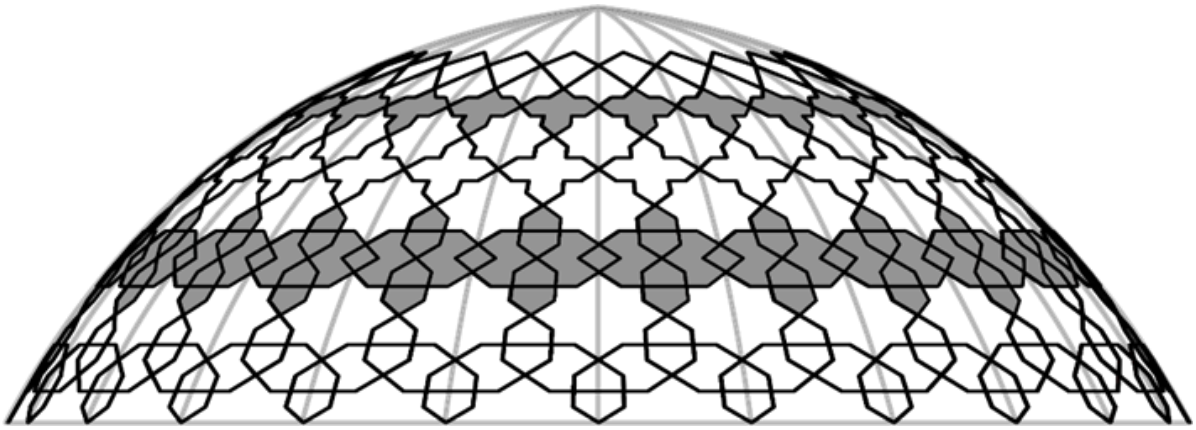


شکل ۴. گره در سطح تخت



شکل ۵. گره در قسمت ترکین

گسترش گره‌ها به طور عمودی یکپارچگی ندارد و گره در هر ردیف مستقل از ردیف بالایی است. بنابراین از نوع الگوهای است که از گسترش کتیبه ای پیروی می کند. آلت‌ها در واگیره به گونه‌ای تنظیم می‌شود که در یک نقطه از ضلع واگیره به یک دیگر برسند. که این عمل باعث ایجاد شمسه‌های مجازی در بین دو ردیف می‌شود که یکپارچگی بصری را تقویت می‌کند.



شکل ۶، گره در گنبد مسجد حکیم اصفهان

نتیجه‌گیری

در معماری ایرانی-اسلامی همواره مسئله سطح و نقش بندی سطوح بسیار پر اهمیت بوده که گره یکی از تزئینات مهم در تزئین سطوح بوده‌است که اساس آن بر روی اصول ریاضی استوار بوده و همواره با پیشرفت علوم ریاضی پیشرفت کرده است. کاربرد گره در سطوح مختلف دارای محدودیت است و با سطوح گنبدی همخوانی ندارد چون کاشی‌کاری گره به صورت چهار تقارن انتقالی، انعکاسی، دورانی و لغزنده صورت می‌گیرد که نیازمند سطح مطابق با صفحه اقلیدوس است. در صورتی که گنبد دارای سطحی با مقطع عرضی متغییر است. از این رو نگاشت گره با اصولی که در سطح تخت نگاشت می‌شود سازگاری ندارد.

بنابراین، برای حل تغییر تراکم در مقطح عرضی گنبد، هنرمندان از تغییر راه‌کار تغییر گره در مقطع عرضی گنبد استفاده کردند. به این صورت که گره به صورت غیرپیوسته است و برای پیوستگی بصری گره‌ها، آلت‌ها در لبه واگیره‌ها به گونه‌ای تنظیم شدند که در یک نقطه بهم برسند، تا شمسه مجازی در بین آنها ایجاد شود. در این حالت، با غیر پیوسته بودن گره‌ها در مقطع عرضی، گره‌ها به صورت پیوسته دیده می‌شود.

پی‌نوشت:

تمامی تصاویر بدون رفرنس متعلق به نویسنده هستند

منابع:

۱- الا سعد، محمد. ۱۳۷۶. کاربردهای هندسه در معماری مساجد، فصلنامه هنر، شماره ۳۳ ،صفحه ۳۴-۵۳. ترجمه: سعید سعیدپور.

۲- حاجی قاسمی، کامبیز.۱۳۷۵. گنجنامه: مساجد اصفهان. جلد۲. تهران: دانشگاه شهید بهشتی و شرکت توسعه فضاهای فرهنگی

۳- نجیب اغلو، گل‌رو. ۱۳۷۹. هندسه و تزئین در معماری اسلامی (طومار توپقاپی). ترجمه: مهرداد قیومی بیدهندی، تهران: روزنه

۴- ولی بیگ، نیما و شفق توکلی و نفیسه خدادادی.۱۳۹۵. بررسی ویژگی‌های حسابی و هندسی در ساختار اجرایی کاشی‌های مسجد خیاط‌ها و نیم آورد اصفهان با نگاه به بهینه‌سازی مصالح مصرفی. باغ نظر. سال سیزدهم، شماره ۳۸

۵- طاهری، جعفر. ۱۳۹۰. نقش ریاضی‌دانان در معماری به روایت متون دورهٔ اسلامی. مجله تاریخ علم

۶- کیانی، محمد یوسف.۱۳۷۶. تزئینات وابسته به معماری ایران در دوره اسلامی. تهران: سازمان میراث فرهنگی کشور

۷- ماهرالنقش، محمود. ۱۳۷۶. معماری مسجد حکیم. تهران: سروش

8- Abas, S. J., and Amer Shaker. Salman. 1995. Symmetries of Islamic Geometrical Patterns. World Scientific. https://books.google.com/books/about/Symmetries_of_Islamic_Geometrical_Patter.html?id=GgaXOuqjqaYC.

9- Ajlouni, Rima. 2018. “A Seed-Based Structural Model for Constructing Rhombic Quasilattice with 7-Fold Symmetry.” Structural Chemistry 29 (6): 1875–83. https://doi.org/10.1007/s11224-018-1169-2.

10- Bonner, Jay. 2017. Islamic Geometric Patterns. Islamic Geometric Patterns. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0217-7.

11- ———. 2018. “Doing the Jitterbug with Islamic Geometric Patterns.” Journal of Mathematics and the Arts 12 (2–3): 128–43. https://doi.org/10.1080/17513472.2018.1466431.

12- Bonner, Jay Francis. 2016. “The Historical Significance of the Geometric Designs in the Northeast Dome Chamber of the Friday Mosque at Isfahan.” Nexus Network Journal 18 (1): 55–103. https://doi.org/10.1007/s00004-015-0275-3.

13- Bonner, Jay, and Craig S. Kaplan. 2017. “4 Computer Algorithms for Star Pattern Construction.” In Islamic Geometric Patterns, 549–73. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0217-7_4.

14- Hankin, EH. 1925. The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art. Calcutta: Government of India. https://scholar.google.com/scholar?hl=en&as_sdt=0%2C5&q=The+Drawing+of+Geometric+Patterns+in+Saracenic+Art.+Memoires+of+the+Archaeological+Society+of+India&btnG=.

15- Horne, Clare E. 2000. Geometric Symmetry in Patterns and Tilings. Textile Industries.

16- Kaplan, Craig S., and David H. Salesin. 2004. “Islamic Star Patterns in Absolute Geometry.” ACM Transactions on Graphics 23 (2): 97–119. https://doi.org/10.1145/990002.990003.

17- Kasraei, Mohammad Hossein, Yahya Nourian, and Mohammadjavad Mahdavinejad. 2016. “Girih for Domes: Analysis of Three Iranian Domes.” Nexus Network Journal 18 (1): 311–21. https://doi.org/10.1007/s00004-015-0282-4.

18- Sarhangi, Reza. 2008. “Illustrating Abu Al-Wafā’ Būzjānī: Flat Images, Spherical Constructions.” Iranian Studies 41 (4): 511–23. https://doi.org/10.1080/00210860802246184.